

## 応力緩和型粘弾塑性力学模型理論の適用条件 (補遺)

山口 拓治\*・柳 川 昭 明\*・木 村 博\*

### Applicability of Viscoelastoplastic Mechanical Model of Stress Relaxation Type (Supplement)

Takuji Yamaguchi, Teruaki Yanagawa and Hiroshi Kimura

(Received Dec. 15, 1976)

In a previous paper, a necessary condition of application of the viscoelastoplastic theory which was derived from the mechanical model composed of three kinds of elements (spring, dashpot and slider) had been proposed. In this paper, we supplemented the condition of application of the theory and examined the applicability of this theory to the previous data of some polymers.

It is a axiom that the distribution function of relaxation time and slip strain must be positive. The necessary and sufficient condition to fulfil this axiom is that the absolute value of stress relaxation rate is the increasing and downward convex function of strain, and it include the previous necessary condition.

The experimental equations for relaxation modulus of polyethylene and polyvinylalcohol did not satisfy the necessary condition. The stress relaxation of polyvinylchloride satisfied the perfect condition. However, the obtained distribution function was unable to use as material function in calculation of stress response to any strain excitation, since the function had very complicated form.

#### 1. 緒 言

樫木らは防振ゴムのクリープ、定速荷重、振動などの実験を行い、その力学的挙動に顕著な非線形性を見出し<sup>1)~3)</sup>、理論的および実験的考察を重ねて1954年にクーロン摩擦要素を含めた一般化力学模型理論を発表した。<sup>4)</sup>この理論はゴム材料のクリープ、<sup>5)</sup>振動挙動<sup>6)</sup>について半定量的であるが、よく適合している。しかし、応力緩和型の理論<sup>4), 7)</sup>については、実験的検討が十分に行われていない。著者らの1人は、先にこの理論の適用条件を求め、ポリエチレン(P E)の応力緩和挙動がこの条件を満足しないことを明らかにした。<sup>8)</sup>そこで提示した条件のみでは適用条件とするのに不十分であることが分ったので、本報では新しい条件を追加し、既報<sup>9)~11)</sup>の実験結果に対してその適用性を検討する。

---

\* 繊維工学科

## 2. 解析方法

### 2.1 基礎方程式

Fig.1にフック弾性スプリング  $G_{ij}$ , ニュートン粘性ダッシュポット  $\eta_{ij}$  およびクーロン摩擦スライダー  $S_i$  の3箇の基本要素が  $n$  組  $m$  群で構成されている一般化応力緩和型粘弾塑性力学模型を示す。<sup>8)</sup> ここで緩和時間  $\tau_j$  とすべりひずみ  $x_i$  は次のように定義する。

$$\tau_j = \frac{\eta_{ij}}{G_j} \quad (i = 1, m, \quad j = 1, n) \quad \cdots (1)$$

$$x_i = \frac{S_i}{G_i} \quad (i = 1, m) \quad \cdots (2)$$

$G_i$ ,  $\tau_j$  および  $x_i$  が連続的に分布する場合の基礎方程式は、

$$\sigma(t, \varepsilon) = G_g \varepsilon(t) - \int_0^\infty \int_0^\varepsilon \int_{t_0}^t \frac{G(\tau, x)}{\tau} \left\{ \varepsilon \omega - x \right\} e^{-\frac{t-u}{\tau}} du dx d\tau \quad \cdots (3)$$

となる。<sup>8)</sup> ここで  $\sigma(t, \varepsilon)$  は時刻  $t$ , ひずみ  $\varepsilon$  に対する応力,  $G_g = n \sum_{i=1}^m G_i$ ,  $x$  はスライダーがすべり始める時のひずみ,  $t_0$  は  $\varepsilon = x$  となる時刻,  $G(\tau, x)$  は  $\tau$  と  $x$  に関する分布関数である。

### 2.2 応力緩和挙動

時刻  $t = 0$  で定ひずみ  $\varepsilon$  を加えた時の応力は、

$$\sigma_r(t, \varepsilon) = G_g \varepsilon - \int_0^\infty \int_0^\varepsilon (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) G(\tau, x) (\varepsilon - x) dx d\tau \quad \cdots (4)$$

となる。<sup>8)</sup> 上式で  $t \rightarrow \infty$  とすると、平衡応力  $\sigma_{re}$  は、

$$\sigma_{re}(\varepsilon) = G_g \varepsilon - \int_0^\infty \int_0^\varepsilon G(\tau, x) (\varepsilon - x) dx d\tau \quad \cdots (5)$$

となる。 $G_g$  は瞬間弾性率を表わし、ひずみ依存性を持たない。一方、平衡弾性率  $G_g$  は上式より、

$$G_e(\varepsilon) = G_g - \int_0^\infty \int_0^\varepsilon G(\tau, x) (1 - \frac{x}{\varepsilon}) dx d\tau \quad \cdots (6)$$

となり、 $\varepsilon$  の減少関数となる。したがって、緩和弾性率  $E_r(t, \varepsilon)$  は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} E_r(t, \varepsilon) &= G_g - \int_0^\infty \int_0^\varepsilon G(\tau, x) (1 - \frac{x}{\varepsilon}) dx d\tau + \int_0^\infty \int_0^\varepsilon G(\tau, x) e^{-\frac{t}{\tau}} (1 - \frac{x}{\varepsilon}) dx d\tau \\ &= G_e(\varepsilon) + \int_0^\infty \int_0^\varepsilon G(\tau, x) e^{-\frac{t}{\tau}} (1 - \frac{x}{\varepsilon}) dx d\tau \end{aligned} \quad \cdots (7)$$

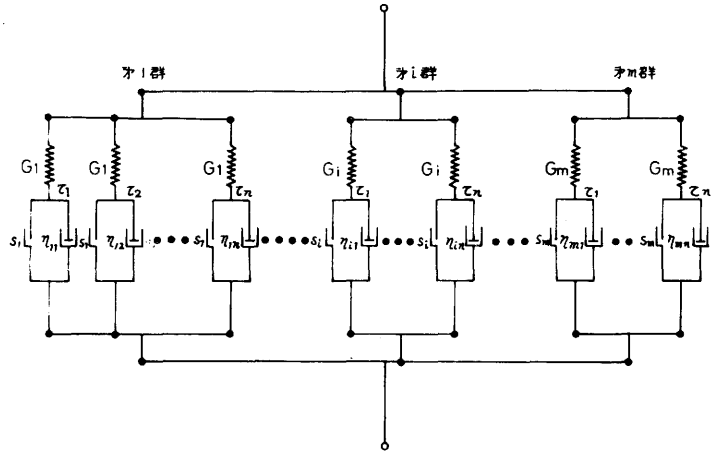


Fig.1 Mechanical model for viscoelastoplastic body.

ここで、分布関数  $G(\tau, x)$  内の  $\tau$  を対数評価するため、

$$\tau G(\tau, x) = H(\ln \tau, x) \quad (8)$$

と変換すると、

$$\sigma_r(t, \varepsilon) = G_r \varepsilon - \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\varepsilon} H(\ln \tau, x) (\varepsilon - x) dx d \ln \tau + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} H(\ln \tau, x) e^{-\frac{t}{\tau}} (\varepsilon - x) dx d \ln \tau \quad (9)$$

となる。上式を  $\varepsilon$  について 2 回微分すると、

$$\frac{\partial^2 \sigma_r(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} = - \int_{-\infty}^{\infty} H(\ln \tau, \varepsilon) (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) d \ln \tau \quad (10)$$

線形理論で緩和時間の分布関数を求める場合と同様に、Alfrey の近似法を採用すると、<sup>12)</sup>

$$H(\ln \tau, x) \approx - \left[ \frac{\partial^2 \sigma_r(t, \varepsilon)}{\partial \ln t \partial \varepsilon^2} \right]_{\substack{t=\tau \\ \varepsilon=x}} \quad (11)$$

あるいは、 $E_r(t, \varepsilon)$  から、

$$H(\ln \tau, x) \approx - \left[ 2 \frac{\partial^2 E_r(t, \varepsilon)}{\partial \ln t \partial \varepsilon} + \varepsilon \frac{\partial^3 E_r(t, \varepsilon)}{\partial \ln t \partial \varepsilon^2} \right]_{\substack{t=\tau \\ \varepsilon=x}} \approx - \left[ \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left\{ \varepsilon^2 \frac{\partial^2 E_r(t, \varepsilon)}{\partial \ln t \partial \varepsilon} \right\} \right]_{\substack{t=\tau \\ \varepsilon=x}} \quad (12)$$

として分布関数が近似的に得られる。より高精度の近似計算法もあるが、<sup>12)</sup> 実験的に得られる  $\sigma_r$  に対しこれ以上の微分操作を行うことはかなりの誤差を生ずる危険があるので、これ以上の近似計算は無理である。

### 2.3 適用条件

$E_r(t, \varepsilon)$  の緩和速度のひずみ依存性は、

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[ - \frac{\partial E_r(t, \varepsilon)}{\partial \ln t} \right] = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\varepsilon} H(\ln \tau, x) \frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} x dx d \ln \tau > 0 \quad (13)$$

となる。<sup>8)</sup> すなわち、 $E_r(t, \varepsilon) \sim \ln t$  曲線の勾配は、印加したひずみ量の増加とともに大きくなる。これが先に求めた本理論の適用条件である。<sup>8)</sup>

分布関数は物理的意味から言って常に正である。したがって、第 1 近似の条件として式 (10) から

$$- \frac{\partial^2 \sigma_r(t, \varepsilon)}{\partial \ln t \partial \varepsilon^2} > 0 \quad (14)$$

が成立することが要請される。また、式 (9) から、

$$- \frac{\partial \sigma_r(t, \varepsilon)}{\partial \ln t} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\varepsilon} H(\ln \tau, x) \frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} (\varepsilon - x) dx d \ln \tau > 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[ - \frac{\partial \sigma_r(t, \varepsilon)}{\partial \ln t} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\varepsilon} H(\ln \tau, x) \frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} dx d \ln \tau > 0 \quad (16)$$

となる。よって、式 (14) ~ (16) から  $-\partial \sigma_r(t, \varepsilon) / \partial \ln t$  は、Fig. 2 に示すように正で  $\varepsilon$  に関して下に凸型の増加関数とならなければならない。もしこの条件を満足しないなら、第 1 近似として得られる分布関数は負となり、分布関数としての意味を失う。また、

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[ - \frac{\partial \sigma_r(t, \varepsilon)}{\partial \ln t} \right] = \left[ - \frac{\partial E_r(t, \varepsilon)}{\partial \ln t} \right] + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[ - \frac{\partial E_r(t, \varepsilon)}{\partial \ln t} \right] > 0 \quad (17)$$

であり、上式の第1項は常に正となるので、式(13)と式(18)の条件は等価である。しかし、式(14)と式(15)はそれぞれ独立の条件であるから、式(13)の条件は必要条件であるが十分条件ではない。式(13)と(18)は等価であり、式(15)の条件は通常満足しているから、式(13)の条件に式(14)の条件を付け加える必要がある。

### 3. 実測値への適用

先にPEの応力緩和挙動が式(13)の条件を満足しないことを数値的に示した<sup>8)</sup>。本報では別の実験結果に対して解析的に式(13)の条件を満足するかどうか判定する。PE<sup>9)</sup>およびポリビニル・アルコール (PVA)<sup>10)</sup>の応力緩和挙動が経験的に、

$$E_r(t, \varepsilon) = f(\varepsilon) k(t) \quad (19)$$

で表わされることを先に示した。f(ε)はひずみの非線形減少関数であり、k(t)は線形緩和弾性率である。上式より、

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[ - \frac{\partial E_r(t, \varepsilon)}{\partial \ln t} \right] = - \frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \frac{\partial k(t)}{\partial \ln t} \quad (20)$$

$\partial f(\varepsilon)/\partial \varepsilon < 0$ 、 $\partial k(t)/\partial \ln t < 0$ であるから、上式は負となり式(13)を満足しない。また、両試料の応力緩和の非線形特性を次の時間-ひずみ換算型<sup>13)</sup>で表わすこともできる。<sup>9)-10)</sup>

$$E_r(t, \varepsilon) = K \left\{ \frac{t}{a_\varepsilon(\varepsilon)} \right\} \quad (21)$$

$a_\varepsilon(\varepsilon)$ はεの非線形減少関数である。上式において $z = t/a_\varepsilon(\varepsilon)$ とおけば、

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[ - \frac{\partial E_r(t, \varepsilon)}{\partial \ln t} \right] = \frac{1}{a_\varepsilon(\varepsilon)} \frac{\partial k(z)}{\partial (\ln z)^2} \frac{\partial a_\varepsilon(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \quad (22)$$

となる。PE, PVAの $G(z) \sim \ln z$  曲線は通常下に凸の曲線であるから $\partial^2 G(z)/\partial (\ln z)^2 > 0$ となり、 $\partial a_\varepsilon(\varepsilon)/\partial \varepsilon < 0$ であるから、上式は負となりやはり式(13)の条件を満足しない。したがって、PEおよびPVAの場合、物理的に意味のある分布関数HあるいはGは存在しない。よって、式(3)を用いてその非線形粘弾性挙動を記述することはできない。

Fig. 3は硬質ポリ塩化ビニル (PVC)の応力緩和曲線である<sup>11)</sup>。図においてひずみの増加とともに緩和速度が増大しているの、式(13)の条件を満している。そこで $\partial \sigma_r(t, \varepsilon)/\partial \ln t$ を関式的に求め、そのε依存性をFig. 4に示す。高ひずみの長時間側を除いて、曲線はFig. 2のように下に凸の形状をしており、必要十分な適用条件を満している。H(lnτ, x)を式(10)によって求め、その3次元グラフをFig. 5に示す。全般的に見て $x = 0.01 \sim 0.02$ の中間ひずみ領域においてH(lnτ, x)は極小値を取って

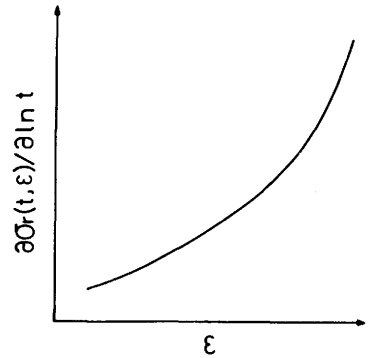


Fig. 2 Strain dependence of stress-relaxation rate for theory of viscoelasto-plastic model.

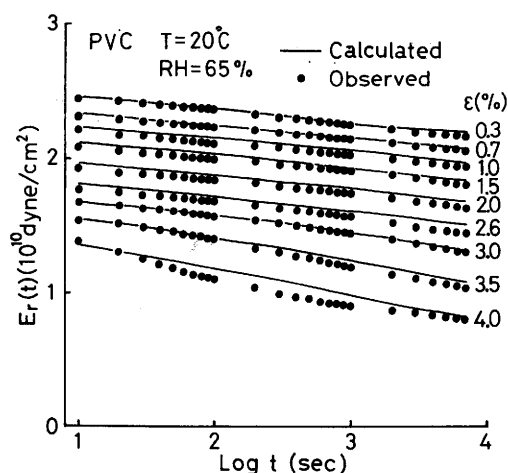


Fig. 3 Relaxation modulus for PVC at 20 °C and 65 % R.H.

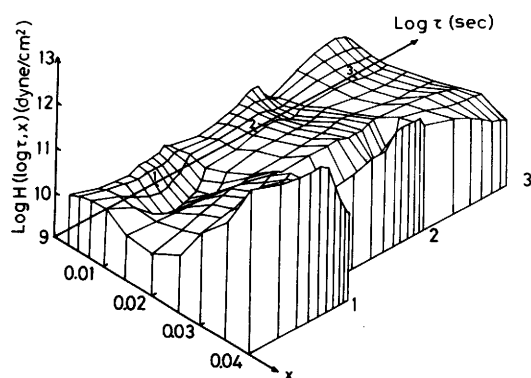


Fig. 5 Distribution function  $H(\log \tau, x)$  of relaxation time and slip strain for PVC at 20 °C and 65 % R.H.

の領域で $\tau$ とともに増加する傾向を示し、 $x = 0.02 \sim 0.025$ で中高の変化を示し、 $x > 0.03$ で $\tau$ とともに減少する傾向を示している。図に明示できなかったが、 $H(\ln \tau, x)$ が局部的に零あるいは負の値を取る場合があった。いずれにしても得られた分布関数 $H$ は、きわめて複雑な形状をしており、また大きな誤差を含むため、これを物質関数に採用して基礎式(3)に還元し、任意の刺激ひずみに対する応答応力を定量的に計算することは、はなはだ困難である。

#### 4. 結 言

粘弾塑性力学模型理論の物質関数である緩和時間とすべりひずみに関する分布関数を求めて本理論を適用するためには、緩和応力の緩和速度の絶対値がひずみに関して下に凸型の増加関数でなければならないことを明らかにした。PE および PVAの応力緩和の経験式から解析的に既報の判定条件を満足しないことを示した。PVCの応力緩和挙動は、上記の条件を満していたが、得られた分布関数は高

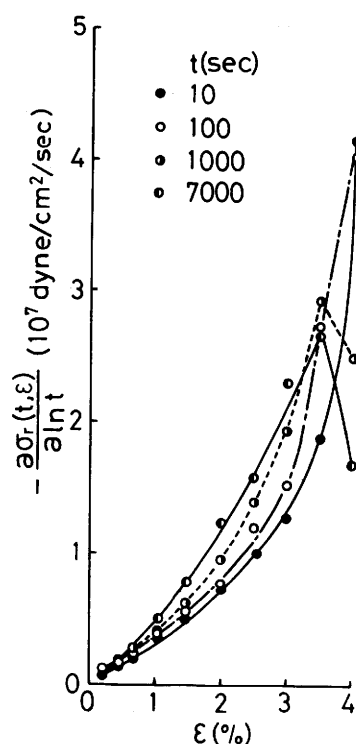


Fig. 4 Strain dependence of stress-relaxation rate for PVC at 20 °C and 65 % R.H.

おり、この傾向は $\tau$ の短い領域において顕著である。これに対し、 $\tau$ の長い領域においては比較的平坦な形状を示している。次に $\tau$ に対する変化を見ると、 $H(\ln \tau, x)$ は $x < 0.015$

度の計算に使用できるほど高い精度を有していなかった。

# 文 献

- 1) 榎木義一：材料試験，1，103（1952）
- 2) 榎木義一，得丸英勝：材料試験，2，142（1953）
- 3) 榎木義一，菅井斎喜：材料試験，2，347（1953）
- 4) Sawaragi, Y., and H. Tokumaru : *Mem. Fac. Eng. Kyoto. Uni.*, 16, 100（1954）
- 5) 榎木義一，谷口肇彦，古市 稔：材料試験，4，451（1955）
- 6) 榎木義一，得丸英勝：機械学会論文集，20，226（1954）
- 7) 榎木義一，得丸英勝：「化学技術者のためのレオロジー」，P.1，槇書店，東京（1959）
- 8) 山口拓治，前田松夫，河合弘廸：織機誌論文集，20，T33（1967）
- 9) 山口拓治，柳川昭明，木村 博：織学誌，32，T-403（1976）
- 10) 山口拓治，柳川昭明，木村 博：福井大織研報告（投稿中）
- 11) 山口拓治，笠嶋文夫，柳川昭明，木村 博：日本レオロジー学会誌，4，72（1976）
- 12) たとえば，「高分子の物性Ⅰ」，高分子実験講座3，P.268，共立出版，東京（1959）
- 13) 山口拓治，柳川昭明，木村 博：織学誌，32，T-227（1976）